Glava 6. INTEGRALI

6.1. NEODREĐENI INTEGRAL

a) Definicija neodređenog integrala

Neka je funkcija f(x) definisana na nekom (konačnom ili beskonačnom) intervalu (a,b).

Definicija 1. Funkciju F(x) nazivamo primitivnom funkcijom za funkciju f(x) na intervalu (a,b), ako je $F'(x)=f(x)$ za svako $x\in(a,b)$.

Primjer 1. Funkcija $F(x)=x^2+x+1,\ x\in R$ je primitivna funkcija za funkciju $f(x)=2x+1$, jer je $F'(x)=f(x)$ za svako $x\in R$. Funkcija $F(x)=-\cos x+2x+3,\ x\in R$ je primitivna za funkciju $f(x)=\sin x+2$, jer je $F'(x)=f(x)$ za svako $x\in R$.

Evo nekih svojstava primitivne funkcije:

- Ako je F(x) primitivna funkcija za funkciju f(x) , tada je i svaka funkcija $F(x)+C$, gdje je C proizvoljna realna konstanta, primitivna funkcija za funkciju f(x) .
- Ako su F(x) i G(x) primitivne funkcije za funkciju f(x), tada je $F(x)-G(x)=C$, gdje je C realna konstanta.
- Ako je funkcija f(x) neprekidna na intervalu (a,b), tada na (a,b) postoji primitivna funkcija, tj. $\exists\, F(x): F'(x)=f(x), x\in(a,b)$.

Definicija 2. Skup svih primitivnih funkcija za funkciju f(x) naziva se neodređenim integralom od funkcije f(x). Oznaka $\int f(x)dx$ (čita se: " integral ef od x de iks").

Dakle, ako je F(x) primitivna funkcija za funkciju f(x), tada je $\int f(x)dx=F(x)+C$, gdje je C proizvoljna konstanta.

Primjer 2. $\int 3x^2dx=x^3+C$, $\int \cos x dx=\sin x+C$, $\int e^x dx=e^x+C$, gdje je C proizvoljna konstanta.

Operaciju nalaženja neodređenog integrala od date funkcije nazivamo integraljenjem te funkcije.

b) Osnovna svojstva neodređenog integrala

1. $\int dF(x) = F(x) + C$, 2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$, 3. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, $\alpha \in R$,

4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

5. Ako je $\int f(x)dx = F(x) + C$, tada je $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F((ax+b) + C$, gdje je $a \neq 0$.

c) Tablica prostijih integrala

1. $\int 0 \cdot dx = C$,
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, $x>0$,
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$,
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, $a > 0$, $a \neq 1$ ($\int e^x dx = e^x + C$),
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$,
9. $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C$,
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $|x|<1$,
11. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$,
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$.

d) Metode integracije neodređenih integrala

Integracija metodom smjene promjenljivih

Neka treba izračunati integral $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, pri čemu su funkcije $\varphi'(x)$ i $f(x)$ neprekidne na zadatim intervalima. Tada se ovaj integral može uprostiti pomoću smjene $t=\varphi(x)$ koristeći formulu: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$. Ova formula se naziva formulom smjene promjenljivih u neodređenom integralu. Specijalno je $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$.

Primjer 3. Naći $\int(2x+3)^5 dx$. Uvedimo smjenu $2x+3=t$. Tada je 2dx=dt, odnosno $dx=\frac{dt}{2}$. Poslije ovih smjena dati integral ima oblik tabličnog integrala: $\frac{1}{2}\int t^5 dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{(2x+3)^6}{12}+C$, gdje je C proizvoljna konstanta.

Primjer 4. Naći: a) $\int 6\sin 3x dx$, b) $\int \cos^7 x \sin x dx$, c) $\int e^{x^2+x+1}(2x+1)dx$.

Rješenje. a) Uvedimo smjenu 3x=t. Tada je $dx=\frac{dt}{3}$ .Dobija se integral $\int 2\sin t dt=-2\cos t+C$ $=-2\cos 3t+C$.

b) Smjenom cosx=t dobijamo $\int\cos^7 x\sin x dx=-\int t^7 dt=-\frac{t^8}{8}+C=-\frac{\cos^8 x}{8}+C$.

c) $e^{x^2+x+1}+C$. Uputstvo. Uvesti smjenu $t=x^2+x+1$.

Primjer 5. Naći: a) $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}$, b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

Rješenje. a) Kako je $-x^2+4x=-(x-2)^2+4$, to je $\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}=\frac{1}{\sqrt{-(x-2)^2+4}}=$ $=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}$, to je $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}$. Uvedimo smjenu $\frac{x-2}{2}=t$. Tada je dx=2dt i $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$.

b) Kako je $x^2+2x=(x+1)^2-1$, to je $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$. Neka je x+1=7. Tada je $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$. Sada uvedimo tzv. Ojlerovu smjenu: $\sqrt{t^2-1}=a-t$. Slijedi, $a^2-2at+1=0$, odnosno ada=tda+adt, tj. $dt=\frac{a-t}{a}da$. Zamjenom u integral $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$ dobijamo da je $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int\frac{da}{a}=\ln|a|+C=\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$.

Napomena 1. Navedimo uputstvo za nalaženje $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Razmotraju se dva slučaja. 1. Neka je a<0. Tada se dati integral svodi na integral oblika $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

2. Neka je a>0. Tada se $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ svodi na integral oblika $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}}$, gdje je $\lambda \in R$.

Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}}$ je riješio Ojler smjenom $\sqrt{x^2+\lambda} = t - x$, $x^2+\lambda = t^2+x^2-2tx$,

$t^2-2tx=\lambda$, 2t dt −2(dt·x+t dx)=0 , tdt−tdx−xdt=0, tdx=(t−x)dt , $\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t}$,

$\frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \frac{dt}{t}$. Sada je $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\lambda}\right)+C$. Slijedi,

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\lambda}\right)+C$. Specijalno, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

Primjer 6. Naći: a) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$, b) $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$, c) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Rješenje. a) Kako je $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, to je $\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$, gdje su A i B brojevi koje treba odrediti. Dalje je A(x−3)+B(x−1)=1, odnosno $A=-\frac{1}{2}$ i $B=\frac{1}{2}$. Slijedi,

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}\left[\int -\frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-3}\right] = \frac{1}{2}\left[-\ln|x-1| + \ln|x-3|\right] + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C.$$

b) $\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3} + C$. Uvesti smjenu x−3=t.

c) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$. Uvedimo smjenu $t=\frac{x+1}{2}$. Tada je dx=2dt i $\frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin \frac{x+1}{2} + C$.

Napomena 2. Navedimo uputstvo za nalaženje $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$. Neka je $D=b^2-4ac$. Razlikujemo tri slučaja: 1. D>0. Podintegralnu funkciju treba razložiti na proste (parcijalne) razlomke: $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right)$. Kada se odrerede brojevi

A i B, zadatak se svodi na: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\cdot\left(A\int\frac{dx}{x-x_1}+B\int\frac{dx}{x-x_2}\right)$. 2. D=0. Sada je $x_1 = x_2$, pa je $ax^2+bx+c=(x-x_1)^2$. Slijedi, $\int\frac{dx}{(x-x_1)^2} = \int\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{x-x_1}+C$. Smjena $x-x_1=t$. 3. D<0. Ovaj slučaj se rješava svođenjem na tablični integral $\int\frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}x + C$.

Primjer 7. Naći: a) $\int \sin^2 x dx$, b) $\int \cos^2 x dx$, c) $\int \cos^5 x dx$, d) $\int \sin 5x \cos x dx$.

Rješenje. a) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$. Smjena t=2x. b) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$.

c) $\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx$ =(t=sinx)= $\int (1-t^2)^2 dt =$

$t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C = \cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$.

d) Naći $\int \sin 5x \cos x dx$. Kako je $\sin 5x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 6x)$, to je $\int \sin 5x \cos x dx =$

$\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 6x)dx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$.

Primjer 8. Naći: a) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ (a>0).

Rješenje. a) Uvedimo smjenu x=asin t (ili x=acost). Tada je $\int\sqrt{a^2-x^2}dx =$

$a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt$ = (x=asint , dx=acostdt) $a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$

$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C = \frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$

$\left(\sin t = \frac{x}{a}, t = \arcsin\frac{x}{a}\right)$.

Metoda parcijalne integracije

Neka izvodi funkcija u(x) i v(x) postoje i neprekidni su na zadatom intervalu. Tada važi:

$$\int u\cdot v'(x)dx = u\cdot v - \int v\cdot u'(x)dx .$$

Ova formula se naziva formulom parcijalne integracije. Kako su v'(x)dx=dv i u'(x)dx=du, to formulu parcijalne integracije možemo zapisati i u obliku:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v \cdot du .$$

Primjer 8. Naći: a) $\int xe^x dx$, b) $\int x\sin x dx$, c) $\int e^x \cos x dx$.

Rješenje. a) $\int xe^x dx = \begin{pmatrix} u = x \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{pmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$.

b) $\int x\sin x dx = \begin{pmatrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin dx \\ v = -\cos x \end{pmatrix} = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$.

c) Neka je $I = \int e^x \cos x dx$. Tada je $I = \int e^x \cos x dx = \begin{pmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \cos dx \\ v = \sin x \end{pmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$

$\begin{pmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \sin dx \\ v = -\cos x \end{pmatrix} = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right) = e^x(\sin x + \cos x) - I + 2C$. Slijedi,

$2I = e^x(\sin x - \cos x) + 2C$, tj. $I = \dfrac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$.

Napomena 3. Slično prethodnim primjerima može se dokazati da je:

$$\int e^{\alpha x} \sin\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha \sin\beta x - \beta\cos\beta x) + C,$$

$$\int e^{\alpha x} \cos\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{a^2 + \beta^2}(\alpha \cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C.$$

Primjer 9. Naći: a) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$, b) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, c) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ $(a>0)$.

Rješenje. a) Označimo sa I dati integral. Tada je $I = \begin{pmatrix} u = \sqrt{a^2 + x^2} \\ du = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ dv = dx \\ v = x \end{pmatrix} =$

$x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \dfrac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$

$x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$. Odavde slijedi da je

$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right] + C$. Specijalno, $\int\sqrt{1+x^2}dx =$

$\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right] + C$.

b) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right] + C$. c) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right] + C$

Napomena 4. Formula za parcijalnu integraciju se koristi za izračunavanje:

$$\int x^n e^x dx, \qquad \int x^n \sin x dx, \qquad \int x^n \cos x dx, \qquad \int x^n \ln x dx, \ldots$$

Kod primjene ove metode integracije postavlja se pitanje: Šta uzeti za **u**, a šta za **dv** u integralu? Odgovor nije jednoznačan. Obično se za **u** uzima onaj činilac koji diferenciranjem uprostiti, pri čemu se vodi računa da se preostali dio koji čini **dv** integraliti. Tako se u integralu $\int x^n f(x)dx$, gdje je f(x)=sinx, cosx, a^x... uzima $u = x^n$ i dv= f(x)dx. Ako je f(x)=lnx, arcsinx, arctgx..., tada je u=f(x) i $dv = x^n dx$.

Primjer 10. Naći rekurentnu formulu za izračunavanje $\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}dx$, $n\in N$ i $n>1$.

Rješenje. Neka je $I_n = \int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}$. Tada je $I_n = \int\frac{x^2+1-x^2}{\left(1+x^2\right)^n}dx = \int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} - \int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^n}$

$I_n = I_{n-1} - \int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^n} = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\cdot I_{n-1}$, tj.

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1},$$

jer je $\int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^n} = -\frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\cdot I_{n-1}$, (u=x, du=dx, $dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^n}$,

$v = -\frac{1}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + C_1$. Smjenom $1+x^2 = t$ dobija se da je

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}.$$

Specijalno, $I_2 = \int\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\text{arctg}x + C$.

Primjer 11. Naći $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$.

Rješenje. Neka je $D=b^2-4ac$. Razmotrićemo tri slučaja: 1) D>0. Podintegralnu funkciju rastaviti na parcijalne razlomke. 2)D=0. Kvadratni trinom je potpun kvadrat, pa se integral rješava smjenom promjenljivih. 3) D<0. U ovom slučaju izračunavanje integrala vršimo u dvije etape: Cilj je da se dati integral svede na oblik $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$. Prilikom ovih transformacija pojavljuje se novi integral koji se dopunjavanjem do potpunog kvadrata i metodom smjene promjenljivih svodi na integral $\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$. Specijalno:

a) $\int \frac{5x+6}{2x^2+5x+3}dx=\int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2x+3}\right)dx=\ln\left|\frac{(x+1)^3}{\sqrt{|2x+3|}}\right|+C$.

b) $\int \frac{2x-1}{x^2+6x+9}dx=\int \frac{2x-1}{(x+3)^2}dx=\begin{pmatrix} x+3=t \\ dx=dt \end{pmatrix}=\int \frac{2(t-3)-1}{t^2}dt=\int \frac{2t-7}{t^2}dt=$

$2\int \frac{dt}{t}-7\int \frac{dt}{t^2}=2\ln|t|+\frac{7}{t}+C=2\ln|x+3|+\frac{7}{x+3}+C$.

c) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)+4}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+2}+2\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}dx=$

$\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+2\operatorname{arctg}(x-1)+C$.

e) Integrali racionalnih funkcija